ANHANG B
VERHÄLTNISGLEICHUNG STATT DREISATZ

Aus einer Längsschnittuntersuchung zur Prozentrechnung im Mathematikunterricht weiß man, dass Lernende aller Schularten flächendeckend zwar relativ viele Aufgaben bearbeiten, dabei jedoch flächendeckend weniger als 50 % richtige Lösungen erzielen.[1] In sehr vielen Schulen wird zur Lösung von Prozentaufgaben das Lösungsschema „Dreisatz“ gelehrt. Die Zuordnung zu den Begriffen Grundwert, Proportionalitätsfaktor bereitet Schwierigkeiten. Ein Wechsel vom Lösungsschema „Dreisatz“ zum Lösungsschema „Verhältnisgleichung“ scheint vorerst nicht möglich zu sein. Das Lösungsmuster „Verhältnisgleichung als Bruchgleichung“ findet bei Didaktikern wenig Anklang.[2] Nach Auffassung des Verfassers dieses Artikels hat der Dreisatz viele Nachteile hinsichtlich Lernverständnis und Anwendung in anderen Fächern. Sichere Anwendung des Dreisatzes setzt ein gutes Verständnis von direkter und indirekter Proportionalität voraus. Scheinbar eignet sich der Dreisatz eher für einfache Aufgaben.

BEISPIEL 1:

Bei einem Straßenmarathon nahmen 400 Sportler teil. 35 Sportler mussten vor Erreichen des Ziels aufgeben. Wie viel Prozent der gestarteten Sportler erreichten das Ziel.

2 Lösungswege richtig

Lösungsweg 1

1. Schritt Berechnung: Wie viel Prozent der Sportler gab vorher auf.
2. Schritt: Das in Schritt 1 erhaltene Ergebnis wird von 100 % abgezogen. Die Differenz ist das gesuchte Ergebnis.

Lösungsweg 2 Auf direktem Weg den Prozentsatz berechnen

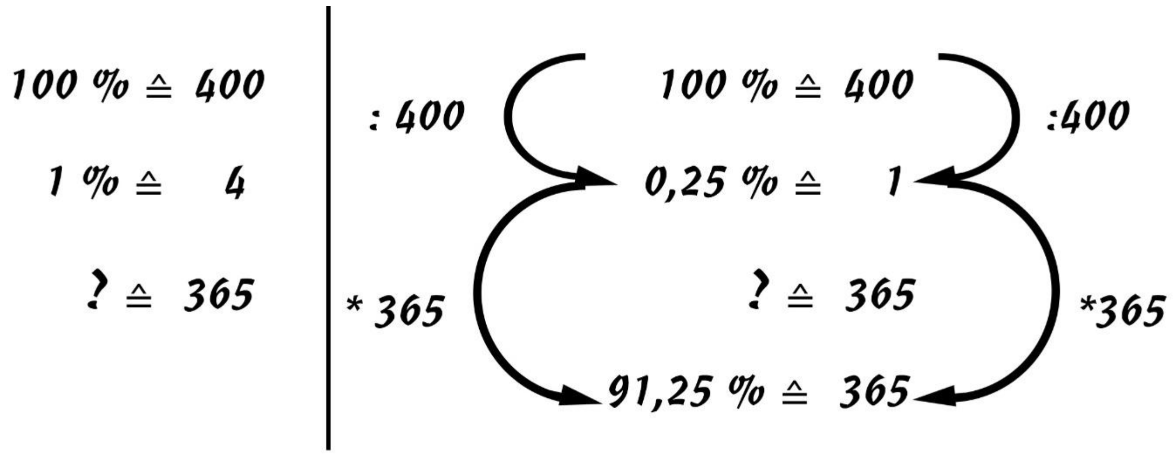
1. Schritt: Berechnung, wie viele Sportler ins Ziel kamen:
   400 – 35 = 365 (Sportler, die im Ziel ankamen)
2. Schritt: Berechnen, welchen Anteil die 365 Sportler an der Gesamtzahl der teilnehmenden 400 Sportler haben, was dem gesuchten Ergebnis entspricht

Die Idee des Dreisatzes basiert auf die Normierung der gegebenen Zahlen auf die Größe „1“. Möglicherweise werden Schüler, die den Dreisatz versuchen anzuwenden, erst einmal so vorgehen, wie auf der linken Seite der Grafik 1 dargestellt. Wie komme ich nun auf das Ergebnis?

[1] Hafner, T. (2012). Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I. Empirische Untersuchung und didaktische Analysen (Dissertation). Wiesbaden: Vieweg+Teubner
[2] Gudladt, P. (2021). Didaktische Überlegungen. In: Inhaltliche Zugänge zu Anteilsvergleichen im Kontext des Prozentbegriffs. Perspektiven der Mathematikdidaktik. Springer Spektrum, Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-32447-6_2

Möglicherweise finden die Schüler sofort oder nach längerem Nachdenken den Lösungsweg wie er in der Grafik 1 auf der rechten Seite angegeben ist.

Gedanklich sind bei der Anwendung des Dreisatzes sehr viele Informationen gleichzeitig zu verarbeiten. Der Zwischenschritt mit der Normierung auf die Größe „1“ verstellt den Blick für Zusammenhänge und typische Muster.



Grafik 1 Lösungsschema Dreisatz

Das Lösungsschema Verhältnisgleichung ist eine exakte mathematische Gleichung. Die Übersetzung des Aufgabentextes in das Lösungsschema Verhältnisgleichung ist einfach, übersichtlich und auch ohne große Anstrengung gedanklich im Kopf zu bewältigen. Der Schüler muss überhaupt keine Kenntnisse zu Proportionalität, Grundwert und Proportionalitätsfaktor haben.

Anders formuliert: Welches Lösungsschema lässt sich mit einer Computersprache einfacher programmieren?

Am Anfang, wenn noch Routine fehlt, kann man den Bruchstrich gedanklich mit Inhalt verknüpfen, und sich Schritt für Schritt zur reinen mathematisch formulierten Verhältnisgleichung bewegen. Bei ausreichender Erfahrung werden diese Schritte automatisch weggelassen.

$$\frac{\text{400 Starter}}{\text{100 Prozent}}\ \text{Marathonlauf} = \frac{\text{(400 -35) Sportler im Ziel}}{\text{x Prozent}}\ \text{Marathonlauf}$$

$$\frac{\text{400 Starter}}{\text{100 Prozent}}\ \text{Marathonlauf} = \frac{\text{365 Sportler im Ziel}}{\text{x Prozent}}\ \text{Marathonlauf}$$

Nun wird die bisherige Gleichung mit textlichen Erläuterungen in eine reine mathematische Gleichung umgeschrieben.

$$\frac{400}{100\,\%} = \frac{365}{x} \qquad \frac{400}{100\,\%} = \frac{365}{x}$$

Die Auflösung über Kreuz nach x geschieht im Handumdrehen. Es ist unwichtig, ob sich die unbekannte Größe im Zähler oder Nenner befindet, sofern die Verhältnisgleichung dem Inhalt nach korrekt ist. Die Auflösung nach der Unbekannten sollte schrittweise für die Schüler erklärt werden. Dann sehen Sie viel besser, dass die sofortige Auflösung nach der unbekannten Variablen x über Kreuz eine Abkürzung darstellt:

$$x = \frac{365 * 100\,\%}{400}$$

$$x = 91{,}25\,\%$$

Der Verzicht auf den Dreisatz bedeutet Zeitgewinn für das Lernen. Die Schüler müssen kein neues Lösungsschema „Verhältnisgleichung“ neben dem Dreisatz lernen, um Aufgaben in den Naturwissenschaften, zum Beispiel das stöchiometrische Rechnen in Chemie, lösen zu können. Es wird Unterrichtszeit gewonnen. Der Vorteil der Verhältnisgleichung besteht in der einfachen Handhabung des zugrundeliegenden Musters, in der universellen Gültigkeit und der sofortigen Anwendbarkeit und Übertragbarkeit auf naturwissenschaftliche Aufgabenstellungen.

Eine Studie zum Chemieunterricht berichtet, dass die Schüler beim stöchiometrischen Rechnen erfolgreicher waren, die algorithmisch vorgingen.[3]

[3] Tepner, Oliver. *Effektivität von Aufgaben im Chemieunterricht der Sekundarstufe I*. Vol. 76. Logos Verlag Berlin GmbH, 2008.

BEISPIEL 2:

In einem Vorlesungsmanuskript[4] wird ausführlich über Aufgabenvarianten des Dreisatzes (siehe nächste Grafik) gesprochen. Man kann in den Tabellen sehen, dass letztlich in der 3. Zeile auf die Verhältnisgleichung zurückgegriffen wird. Warum wird nicht gleich die Verhältnisgleichung im Unterricht eingeführt?

1.a Jedes Kind beim Klassenfest bekommt ein Glas Apfelsaft.
Für 40 Kinder braucht man 10 l Apfelsaft. Wie viel Apfelsaft braucht man für 32 Kinder?

Dreisatz:

Für 40 Kinder braucht man 10 Liter Apfelsaft.	Bedingungssatz.
Für 32 Kinder braucht man wie viel Apfelsaft?	Fragesatz.

Die drei Sätze des Dreisatzes, die auch so gesprochen werden können:

Für 40 Kinder braucht man 10 Liter Apfelsaft.	Bedingungssatz.
Für 1 Kind braucht man den 40. Teil, also 10 : 40 = 0,25 Liter Apfelsaft.	Schluss auf die Einheit
Für 32 Kinder braucht man 32 mal soviel, also 10:40 · 32 = 8 Liter Apfelsaft.	Schluss auf die Vielheit

Ausführliches Schema, Sätze während des Aufschreibens dazu sprechen:

Zahl der Kinder	Apfelsaft in Litern
40	10
1	$\frac{10}{40}$
32	$\frac{10 \cdot 32}{40} = 8$

„Apfelsaft" gesucht, also *„Apfelsaft"* in die rechte Spalte schreiben

Abgekürztes Schema

Kinder	Apfelsaft in l
40	
1	$\frac{10 \cdot 32}{40} = 8$
32	

Tabelle:

	Zahl der Kinder	Apfelsaft in Litern	
:40	40	10	:40
	1	$\frac{10}{40}$	
·32	32	$\frac{10 \cdot 32}{40} = 8$	·32

„Apfelsaft" gesucht, also *„Apfelsaft"* in die rechte Spalte schreiben

Die Lösung über eine Tabelle bietet sich an, wenn Zuordnungen und ihre Eigenschaften im Vordergrund stehen.

Verhältnisgleichung:

Lösen über Verhältnisgleichung, unbekannte Größe (Variable) möglichst in den Zähler setzen.

Apfelsaft	0 l	x l	10 l
Kinder	0	32	40

$$\left.\begin{array}{c} \frac{x}{32} = \frac{10}{40} \\ \text{oder auch} \\ \frac{x}{10} = \frac{32}{40} \end{array}\right\} \quad x = 8$$

Grafik 2 Erklärung des Dreisatzes, Vorlesungsmanuskript zur Didaktik der Mathematik

4

Der unten angegebene Hinweis zur Verhältnisgleichung (s. obige Grafik), die Unbekannte in den Zähler zu setzen führt zu Irritationen und verunsichert möglicherweise die Schüler. Möglicherweise ist der Hinweis auch kontraproduktiv für das Denken, weil der Hinweis, die Variable besser in den Zähler zu nehmen den Gedankenfluss beim Schüler behindert. Denn die formulierten Sätze zur Aufgabe enthält auch optisch schon das Lösungsschema „Verhältnisgleichung“ (vgl. rechte Seite unten). Man muss nur noch den überflüssigen Text extrahieren, zwischen den beiden Zahlen einen Bruchstrich einfügen und schon ist die Verhältnisgleichung auf dem Papier und kann mühelos ausgerechnet werden.

Aufgabentext in übersichtlicher Schreibweise

Für 40 Kinder braucht man 10 Liter Apfelsaft.
Für 32 Kinder braucht man wie viel Apfelsaft? o

Verhältnisgleichung zum Aufgabentext

$$\frac{40}{32} = \frac{10\ \text{Liter}}{x}$$

oder

$$\underset{10\ \text{Liter}}{\overset{40\ \text{Kinder}}{\text{——— trinken ———}}} = \underset{x\ \text{Liter}}{\overset{32\ \text{Kinder}}{\text{——— trinken ———}}}$$

Wenn man den Schülern zeigt, dass aus der nun formulierten Gleichung auch die nachfolgenden Verhältnisgleichungen hervorgehen, so wird die Akzeptanz für das Rechnen mittels Verhältnisgleichung bei den Schülern groß sein, denn die Gefahr, Fehler zu machen, ist sehr gering.

$$\frac{40}{32} = \frac{10\ \text{Liter}}{x} \qquad\qquad \frac{40}{10\ \text{Liter}} = \frac{32}{x}$$

Es ist in aller Interesse, dass sich das Leistungsniveau beim fehlerfreien Rechnen von Prozent- und Verhältnisaufgaben in Deutschland sich stark verbessert, von ca. 50 % richtige Lösungen der Schüler über alle Schularten in Richtung 100 % richtige Lösungen.